

2025
CANPOINT


CANPOINT®

全品

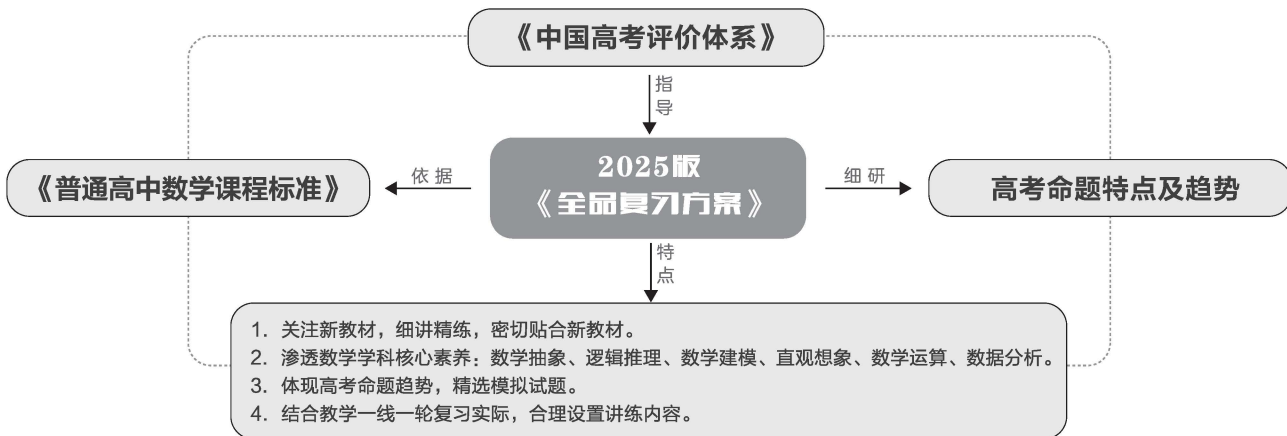
高考复习方案

主编：肖德好

听课手册
数学
BS

 延边教育出版社

新教材 新一轮 数学



▼ 图书结构与特点

听课手册

作业手册

听

课

手

册

必备基础梳理

↓ 夯基础

常识常错巩固

↓ 究本源

课堂考点探究

↓ 全覆盖、破重难

课时作业

↓ 提综合

增分加练

作

业

手

册

基础·难点·重点

讲清·讲透·讲活

薄弱点·疑难点

练熟·练透·练活

易错易混，拾遗补漏

教材改编，理解应用

核心章节，分课时讲解

学科难点，思维拓展

挑战·失误

分层排查

自查·趋势

题型、阶段

微点精练

题型一 常识题

1. [教材改编] 已知 $p: a \in P \cup Q, q: a \in P$, 则 p 是 q 的 _____ 条件.
2. [教材改编] 命题“任意两个等边三角形都相似”是 _____ 量词命题. 它的否定是 _____, 并且是 _____ (填“真”或“假”)命题.
3. [教材改编] 已知 $\triangle ABC$ 的三边的长分别为 a, b, c , 且 $a \leq b \leq c$, 那么“ $a^2 + b^2 = c^2$ ”是“ $\triangle ABC$ 为直角三角形”的 _____ 条件.

微点2 函数奇偶性的应用

例2 (1) [2023·新课标Ⅱ卷] 若 $f(x) = (x + a) \ln \frac{2x-1}{2x+1}$ 为偶函数, 则 $a =$ _____ ()

A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

思维拓展(一)

逻辑推理之抽象函数的性质

抽象函数主要有两个研究方向, 一是由抽象函数结构、性质, 联想已学过的基本函数, 再由基本函数的相关结论, 预测、猜想抽象函数可能有的相关结论. 二是根据给出的抽象函数性质, 推导其特殊的性质和关系. 考题多和函数的性质(单调性、奇偶性、周期性等)相结合, 以小题的方式考查.

例 [2022·新高考全国Ⅱ卷] 若函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$, $f(1) = 1$, 则 $\sum_{k=1}^{2023} f(k) =$ _____ (A)

A. -3 B. -2 C. 0 D. 1

解法二 取 $f(x) = 2\cos \frac{\pi}{3}x$ 符合条件, 则 $T = 6$, 计算可得 $f(2) = -1, f(3) = -2, f(4) = -1, f(5) = 1, f(6) = 2$, 所以 $\sum_{k=1}^6 f(k) = 1 - 1 - 2 - 1 + 1 = -2$.

应用演练

1. [微点2] [2024·浙江嘉兴模拟] 已知函数 $f(x) = (x+a-2)(x^2+a-1)$ 为奇函数, 则 $f(a)$ 的值是 _____ ()

A. 0 B. -12 C. 12 D. 10

综合提升

7. [2023·武汉调研] 设集合 $A = \{y | y = \sqrt{x} + 1, x \in \mathbf{R}\}, B = \{y | y = e^x, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B =$ _____ ()

A. $(0, +\infty)$ B. $[1, +\infty)$ C. $(0, 1)$ D. $(-\infty, 1)$

小题阶段自查(一) 预备知识

一、单选题

1. [2023·辽宁沈阳二模] 已知集合 $A = \{x | -1 \leq x < 2\}, B = \{x | x > 1\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) =$ _____ ()

A. $\{x | -1 \leq x < 1\}$ B. $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$ C. $\{x | -1 \leq x < 2\}$ D. $\{x | x < 2\}$

5. [2023·山西朔州模拟] 函数 $y = 3x + \frac{4}{3x-1} (x > \frac{1}{3})$ 的最小值为 _____ ()

A. 8 B. 7 C. 6 D. 5

解答专题特训(一) 函数与导数

解答题(本大题共6小题, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

1. [2024·江苏南京模拟] 已知函数 $f(x) = x^2 + 2x - a \ln(x+1) (a \in \mathbf{R})$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x) > -1 - e^x$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

3. [2023·安徽铜陵三模] 已知函数 $f(x) = e^{-ax} (a \in \mathbf{R})$.

(1) 试讨论函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 若存在实数 $x > 0$, 使得 $xe^{bx} - e^x + (b-1)x^2 + x \ln x \geq 0$ 成立, 求实数 b 的取值范围.

第一单元 预备知识

第 1 讲 集合	001
第 2 讲 常用逻辑用语	004
第 3 讲 不等式的性质	007
第 4 讲 基本不等式	009
第 5 讲 一元二次不等式	012
▶ 小题阶段自查(一) 预备知识	461

第二单元 函数

第 6 讲 函数的概念及其表示	016
第 7 讲 函数的单调性与最值	020
第 8 讲 函数的奇偶性、对称性与周期性	023
▶ 思维拓展(一) 逻辑推理之抽象函数的性质	027
▶ 小题阶段自查(二) 函数的概念与性质	462
第 9 讲 二次函数与幂函数	028
第 10 讲 指数运算与指数函数	031
第 11 讲 对数运算与对数函数	034
▶ 增分微课 1 指、对、幂函数之比较大小	037
第 12 讲 函数的图象	038
第 13 讲 方程解的存在性及方程的近似解	042
第 14 讲 实际问题中的函数模型	045
▶ 小题阶段自查(三) 函数	463

第三单元 导数及其应用

第 15 讲 导数的概念及其意义、导数的运算	050
第 16 讲 导数与函数的单调性	053
第 17 讲 导数与函数的极值、最值	056
▶ 思维拓展(二) 解决极值、零点有关的参数问题	060
▶ 增分微课 2 构造法在解决函数、导数问题中的应用	061
第 18 讲 导数与不等式	062
第 1 课时 利用导数研究恒(能)成立问题	062
第 2 课时 利用导数证明不等式	065
第 3 课时 放缩法证明不等式	067
第 19 讲 利用导数研究函数的零点	069
第 20 讲 双变量不等式的证明	072
▶ 小题阶段自查(四) 导数及其应用	465
▶ 解答专题特训(一) 函数与导数	467

第四单元 三角函数、解三角形

第 21 讲 任意角和弧度制、三角函数的概念	075
第 22 讲 同角三角函数的基本关系式与诱导公式	078

微课·思维与方法

微课 1 方法: 变形用基本不等式求最值	010
微点 1 配凑法	
微点 2 常数代换法	
微点 3 消元法	
微课 2 思维: 以分段函数为背景的问题	019
微点 1 分段函数求值	
微点 2 分段函数与方程、不等式	
微课 3 方法: 利用函数单调性解决问题	022
微点 1 比较大小	
微点 2 解不等式问题	
微点 3 求函数最值	
微点 4 求参数的范围(或值)	
微课 4 思维: 函数奇偶性及其延伸	024
微点 1 函数奇偶性的判断	
微点 2 函数奇偶性的应用	
微点 3 函数图象的对称性	
微课 5 思维: 函数性质的综合问题	026
微点 1 奇偶性与单调性的结合	
微点 2 对称性与周期性的结合	
微点 3 奇偶性与周期性的结合	

第 23 讲	两角和与差的三角函数公式与二倍角的三角函数公式	081
第 24 讲	简单的三角恒等变换	083
第 25 讲	三角函数的图象与性质	087
第 26 讲	函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 及三角函数的简单应用	090
第 27 讲	余弦定理、正弦定理	095
第 28 讲	余弦定理、正弦定理应用举例	099
▶ 小题阶段自查(五)	三角函数	469
▶ 解答专题特训(二)	解三角形	471

第五单元 平面向量与复数

第 29 讲	平面向量的概念及其线性运算	102
第 30 讲	平面向量基本定理及坐标表示	105
第 31 讲	平面向量的数量积	108
第 32 讲	平面向量的综合问题	111
第 33 讲	复数	114
▶ 小题阶段自查(六)	平面向量与复数	473

第六单元 数列

第 34 讲	数列的概念与简单表示法	117
第 35 讲	等差数列及其前 n 项和	120
第 36 讲	等比数列及其前 n 项和	124
第 37 讲	数列求和	127
第 38 讲	数列的综合问题	131
第 39 讲	双数列问题	135
▶ 小题阶段自查(七)	数列	475
▶ 解答专题特训(三)	数列	477

第七单元 立体几何

第 40 讲	基本立体图形、简单几何体的表面积与体积	139
▶ 增分微课 3	与球有关的切、接问题	143
第 41 讲	空间点、直线、平面之间的位置关系	144
第 42 讲	平行关系	147
第 43 讲	垂直关系	151
第 44 讲	空间向量的概念与运算	156
第 45 讲	空间角	160
第 46 讲	空间距离及立体几何中的探索性问题	163
▶ 增分微课 4	空间中的动态问题	166
▶ 小题阶段自查(八)	立体几何	479
▶ 解答专题特训(四)	立体几何	481

微课 6 方法：解决指数型函数有关问题的方法

		033
微点 1	利用单调性比较大小	
微点 2	解简单的指数方程或不等式	
微点 3	探究指数型函数的性质	

微课 7 方法：解决对数函数性质有关的问题

		036
微点 1	比较大小	
微点 2	解对数方程或不等式	
微点 3	对数函数性质的综合问题	

微课 8 方法：识图与辨图的常见方法

		040
微点 1	性质检验法	
微点 2	图象变换法	

微课 9 思维：函数图象的应用

		041
微点 1	研究函数的性质	
微点 2	图象在不等式中的应用	
微点 3	求参数的取值范围	

微课 10 思维：利用导数解决函数的极值问题

		057
微点 1	由图象判断函数极值	
微点 2	已知函数求极值	
微点 3	已知极值求参数	

微课 11 思维：三角函数的性质有关问题

		088
微点 1	三角函数的周期性	
微点 2	三角函数的奇偶性与对称性	
微点 3	三角函数的单调性	

微课 12 方法：正弦定理在几何中的应用

		097
微点 1	最值、范围问题	
微点 2	多三角形背景解三角形	

微课 13 方法：平面向量的线性运算背景问题

		104
微点 1	平面向量的加、减运算的几何意义	
微点 2	平面向量的线性运算	
微点 3	利用向量的线性运算求参数	

第八单元 解析几何

第 47 讲	直线的倾斜角与斜率、直线的方程	168
第 48 讲	两直线的位置关系	171
第 49 讲	圆的方程	174
第 50 讲	直线与圆、圆与圆的位置关系	177
▶ 小题阶段自查(九)	直线与圆	483
第 51 讲	椭圆	180
	第 1 课时 椭圆及其性质	182
	第 2 课时 直线与椭圆的位置关系	184
第 52 讲	双曲线	187
第 53 讲	抛物线	192
第 54 讲	圆锥曲线热点问题	196
	第 1 课时 求值、最值与范围、证明问题	197
	第 2 课时 定点、定值、探索性问题	201
▶ 思维拓展(三)	数学运算之解析几何设点、设线问题	205
▶ 小题阶段自查(十)	圆锥曲线	485
▶ 解答专题特训(五)	解析几何	487

第九单元 统计

第 55 讲	抽样的基本方法	208
第 56 讲	用样本估计总体	211
第 57 讲	统计案例	217
▶ 小题阶段自查(十一)	统计、统计案例	489

第十单元 排列、组合与二项式定理、概率

第 58 讲	分类加法计数原理与分步乘法计数原理	223
第 59 讲	排列与组合	226
第 60 讲	二项式定理	229
第 61 讲	随机事件与概率、古典概型	232
第 62 讲	事件的独立性与条件概率	236
第 63 讲	全概率公式及应用	240
▶ 思维拓展(四)	利用数列递推关系解决概率问题	243
第 64 讲	离散型随机变量的分布列、均值与方差	244
第 65 讲	二项分布与超几何分布、正态分布	248
▶ 增分微课 5	统计、概率的综合问题	254
▶ 小题阶段自查(十二)	计数原理、概率、随机变量及其分布	492
▶ 解答专题特训(六)	统计与概率	494
▶ 增分微课 6	推理、想象之创新思维试题	257

微课 14 方法:平面向量数量积的应用 109

微点 1 平面向量的模

微点 2 平面向量的夹角

微点 3 平面向量的垂直

微课 15 方法:解数列的递推公式不同类型的方法

119

微点 1 形如 $a_{n+1} = a_n + f(n)$

微点 2 形如 $a_{n+1} = a_n \cdot f(n)$

微点 3 形如 $a_{n+1} = pa_n + q$ ($p \neq 0$ 且 $p \neq 1$)

微点 4 形如 $a_{n+1} = \frac{Aa_n}{Ba_n + C}$ (A, B, C 为常数)

微课 16 方法:正方体中的截面、嵌套问题 146

微点 1 正方体中的截面问题

微点 2 正方体中的嵌套问题

微课 17 思维:椭圆的简单几何性质 183

微点 1 求椭圆的离心率的值或范围

微点 2 与椭圆有关的范围(最值)问题

微课 18 思维:双曲线的几何性质有关问题 189

微点 1 渐近线

微点 2 离心率

作业手册+增分加练 [单独成册 P299~P496]

参考答案(听课手册) [单独成册 P260~P298] 参考答案(作业手册+增分加练) [单独成册 P498~P584]

第1讲 集合

课标要求

1. 通过实例,了解集合的含义,理解元素与集合的关系.
2. 针对具体问题,能在自然语言和图形语言的基础上,用符号语言刻画集合.
3. 在具体情境中,了解全集与空集的含义.
4. 理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集.
5. 理解两个集合的并集与交集的含义,能求两个集合的并集与交集.
6. 理解在给定集合中一个子集的补集的含义,能求给定子集的补集.
7. 能使用 Venn 图表达集合的基本关系与基本运算,体会图形对理解抽象概念的作用.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 集合及其表示方法

- (1) 集合元素的性质: _____、_____、无序性.
 (2) 集合与元素的关系: ① 属于, 记为 _____; ② 不属于, 记为 _____.
 (3) 集合的表示方法: 列举法、_____、_____和区间法.
 (4) 常见数集及记法

数集	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集	正实数集
符号						

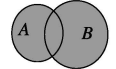
2. 集合间的基本关系

		文字语言	符号语言	记法
基本关系	子集	如果集合 A 中的 _____ 都属于集合 B, 那么称集合 A 是集合 B 的子集	若 $x \in A$, 则 $x \in B$	$A \subseteq B$ 或 _____
	真子集	对于两个集合 A 与 B, 如果 _____, 且 _____, 那么称集合 A 是集合 B 的真子集	① $A \subseteq B$; ② $\exists x \in B, x \notin A$	$A \subset B$ 或 $B \supsetneq A$
	相等	如果集合 A 是集合 B 的子集, 且集合 B 也是集合 A 的子集, 那么称集合 A 与集合 B 相等	$A \subseteq B, B \subseteq A$	_____

(续表)

	文字语言	符号语言	记法
空集	_____ 任何元素的集合叫作空集, 空集是任何集合的子集	① $\forall x, x \notin \emptyset$; ② $\emptyset \subseteq A$	\emptyset

3. 集合的基本运算

表示运算	文字语言	符号语言	图形语言	记法
交集	既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素组成的集合	$\{x x \in A, x \in B\}$		_____
并集	由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合	$\{x x \in A, x \in B\}$		_____
补集	全集 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合	$\{x x \in U, x \notin A\}$		_____

4. 集合的运算性质

- (1) 交集的运算性质: $A \cap B = B \cap A$; $A \cap A = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$; $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$.

(2)并集的运算性质: $A \cup B =$ _____;
 $A \cup A = A; A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A; A \cup B =$
 _____ $\Leftrightarrow B \subseteq A$.

(3)补集的运算性质: $A \cup (\complement_U A) = U; A \cap$
 $(\complement_U A) =$ _____; $\complement_U(\complement_U A) =$ _____;
 $\complement_U(A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$;
 $\complement_U(A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B$.

◆◆ 常用结论

1. 集合子集的个数:集合 A 中有 n 个元素,则集合 A 有 2^n 个子集、 $2^n - 1$ 个真子集、 $2^n - 1$ 个非空子集、 $2^n - 2$ 个非空真子集.

2. 子集的传递性: $A \subseteq B, B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$ (真子集也满足).

3. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow \complement_U A \supseteq \complement_U B$.

4. 集合元素个数: $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) +$
 $\text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$ (常用在实际问题中).

对点演练

题型一 常识题

1. [教材改编] 已知集合 $A = \{0, 1, x^2 - 5x\}$, 若 $6 \in A$, 则实数 x 的值为_____.

2. [教材改编] 已知集合 $C = \{(x, y) \mid y = x\}$,
 集合 $D = \{(x, y) \mid \begin{cases} 2x - y = 1, \\ x + 4y = 5 \end{cases}\}$, 集合 D 用列
 举法表示为_____, 并且 C _____ D (从
 “=” “ \subseteq ” “ \supseteq ” 中选一个合适的填入)

3. [教材改编] 已知全集 $U = A \cup B = \{x \in \mathbf{Z} \mid$
 $0 \leq x \leq 10\}$, $A \cap (\complement_U B) = \{1, 3, 5, 7\}$, 则集合
 $B =$ _____.

题型二 常错题

◆索引:忽视集合元素的性质致错;对集合的表示方法理解不到位致错;忘记空集的情况致错;忽视集合运算中端点取值致错.

4. 已知集合 $\{1, a\} = \{a, a^2\}$, 则实数 $a =$ _____.

5. 已知集合 $M = \{x \mid y = \sqrt{x-1}\}$, $N = \{y \mid y =$
 $\sqrt{x-1}\}$, 则 $M \cup N =$ _____.

6. 已知集合 $A = \{2, 3\}$, $B = \{x \mid ax - 1 = 0\}$, 若
 $A \cap B = B$, 则实数 a 的所有可能取值组成的
 集合为_____.

7. 设集合 $A = \{x \mid a - 1 < x < a + 1, x \in \mathbf{R}\}$, $B =$
 $\{x \mid 1 < x < 5, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \not\subseteq B$, 则实数 a 的取
 值范围为_____.

课堂考点探究

探究点一 集合的概念与表示

例1 (1) 设集合 $A = \{2, 4\}$, $B = \{1, 2\}$, 集合 $M =$
 $\{z \mid z = \frac{x}{y}, x \in A, y \in B\}$, 则 M 中所有元素之
 和为 _____ ()

A. 3 B. 5

C. 7 D. 9

(2) 已知集合 $A = \{m + 2, 2m^2 + m\}$, 若 $3 \in A$, 则
 m 的值为_____.

◆◆ 总结反思

解决集合含义问题的关键有三点:一是确定构成集合的元素是什么;二是看这些元素的限制条件是什么;三是根据元素的特征(满足的条件)构造关系式解决相应问题. 特别提醒:含字母的集合问题,在求出字母的值后,需要验证集合的元素是否满足互异性.

变式题 (1) 已知集合 $A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{N}^*,$
 $y \geq x\}$, $B = \{(x, y) \mid x + y = 8\}$, 则 $A \cap B$ 中元素
 的个数为 _____ ()

A. 2 B. 3 C. 4 D. 6

(2) 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 已知集合 $\{1, a, \frac{b}{a}\} = \{0, a^2, a +$
 $b\}$, 则 $(a + b)^{2024} =$ _____.

探究点二 集合的基本关系

例2 (1) [2023·云南师大附中二模] 已知 $A =$
 $\{x \mid x = 3k + 2, k \in \mathbf{N}\}$, $B = \{y \mid y = 6m + 5, m \in$
 $\mathbf{N}\}$, 则集合 A 与集合 B 之间的关系为 _____ ()

A. $A = B$ B. $B \subsetneq A$

C. $A \subsetneq B$ D. $A \cap B = \emptyset$

(2) [2023·新课标 II 卷] 设集合 $A = \{0, -a\}$,
 $B = \{1, a - 2, 2a - 2\}$, 若 $A \subseteq B$, 则 $a =$ _____ ()

A. 2 B. 1 C. $\frac{2}{3}$ D. -1

◆◆ 总结反思

(1)一般利用数轴法、Venn图法以及结构法判断两集合的关系,对于含有参数的集合,需要对式子进行变形,有时需要进一步对参数进行分类讨论.

(2)确定非空集合 A 的子集的个数,需先确定集合 A 中的元素的个数.特别提醒:不能忽略任何非空集合是它自身的子集,空集是非空集合的真子集.

(3)根据集合的关系求参数值(或取值范围)的关键是将条件转化为元素满足的式子或区间端点间的关系.

变式题 (1)满足 $\{1\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3\}$ 的集合 A 的个数是 ()

- A. 2 B. 3
C. 4 D. 8

(2)[2023·吉林模拟] 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{N} \mid |x| < 2\}$, $B = \{x \mid ax - 1 = 0\}$,若 $B \subsetneq A$,则实数 a 的值为 ()

- A. 0或1 B. $\frac{1}{2}$ 或1
C. 1 D. $\frac{1}{2}$

探究点三 集合的基本运算

► 角度1 集合的运算

例3 (1)[2023·杭州期末] 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 1 < 0\}$, $B = \{x \mid \lg x \leq 0\}$,则 $A \cup B =$ ()

- A. $\{x \mid 0 < x < 1\}$ B. $\{x \mid 0 < x \leq 1\}$
C. $\{x \mid -1 < x < 1\}$ D. $\{x \mid -1 < x \leq 1\}$

(2)[2023·全国乙卷] 设集合 $U = \mathbf{R}$,集合 $M = \{x \mid x < 1\}$, $N = \{x \mid -1 < x < 2\}$,则 $\{x \mid x \geq 2\} =$ ()

- A. $\complement_U(M \cup N)$ B. $N \cup (\complement_U M)$
C. $\complement_U(M \cap N)$ D. $M \cup (\complement_U N)$

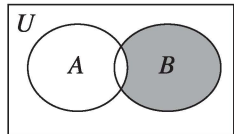
◆◆ 总结反思

对于已知集合的运算,可根据集合的交集、并集和补集的定义直接求解,必要时可结合数轴以及Venn图求解.

变式题 (1)[2023·新课标I卷] 已知集合 $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $N = \{x \mid x^2 - x - 6 \geq 0\}$,则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{-2, -1, 0, 1\}$ B. $\{0, 1, 2\}$
C. $\{-2\}$ D. $\{2\}$

(2)[2023·广东六校一联]



已知集合 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x \mid \frac{x-3}{x+1} > 0\}$, $B = \{x \mid y = \ln(3-x)\}$,则图中阴影部分表示的集合为 ()

- A. $[-1, 3]$ B. $(3, +\infty)$
C. $(-\infty, 3]$ D. $[-1, 3)$

► 角度2 利用集合的运算求参数的值(范围)

例4 (1)设集合 $A = \{x \mid x^2 - 4 \leq 0\}$, $B = \{x \mid 2x + a \leq 0\}$,且 $A \cap B = \{x \mid -2 \leq x \leq 1\}$,则 $a =$ ()

- A. -4 B. -2 C. 2 D. 4

(2)已知集合 $A = \{2, -2\}$, $B = \{x \mid x^2 - ax + 4 = 0\}$,若 $A \cup B = A$,则实数 a 的取值集合为 ()

- A. $\{a \mid -4 < a < 4\}$ B. $\{a \mid -2 < a < 2\}$
C. $\{-4, 4\}$ D. $\{a \mid -4 \leq a \leq 4\}$

◆◆ 总结反思

利用集合的运算求参数的值或取值范围的方法

(1)与不等式有关的集合,一般利用数轴解决,要注意端点值能否取到.

(2)若集合中的元素能一一列举,则一般先用观察法得到不同集合中元素之间的关系,再列方程(组)求解.

变式题 (1)(多选题)已知集合 $M = \{x \mid 6x^2 - 5x + 1 = 0\}$,集合 $P = \{x \mid ax = 1\}$,若 $M \cap P = P$,则实数 a 的值可能为 ()

- A. 0 B. 1
C. 2 D. 3

(2)已知集合 $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \geq a\}$,集合 $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid 2^x \leq 4\}$.若 $A \cap B$ 只有4个子集,则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-2, -1]$ B. $[-2, -1]$
C. $[0, 1]$ D. $(0, 1]$

► 角度3 集合语言的运用

例5 (1)某中学的学生积极参加体育锻炼,其中有96%的学生喜欢足球或游泳,60%的学生喜欢足球,82%的学生喜欢游泳,则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是 ()

- A. 62% B. 56%
C. 46% D. 42%

(2) 已知 U 是非空数集, 若非空集合 A_1, A_2 满足以下三个条件, 则称 (A_1, A_2) 为集合 U 的一种真分拆, 并规定 (A_1, A_2) 与 (A_2, A_1) 为集合 U 的同一真分拆.

① $A_1 \cap A_2 = \emptyset$;

② $A_1 \cup A_2 = U$;

③ $A_i (i=1, 2)$ 的元素个数不是 A_i 中的元素.

则集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的真分拆的种数是 ()

A. 5

B. 6

C. 10

D. 15

◆◆ 总结反思

以集合语言为背景的新定义问题, 需正确理解新定义(即分析新定义的特点, 把新定义所叙述的问题的本质弄清

楚), 转化成熟知的数学情境, 并能够应用到具体的解题过程中, 这是破解新定义集合问题的关键所在.

变式题 [2023·湖南师大附中模拟] 若一个非空数集 F 满足: 对任意 $a, b \in F$, 都有 $a+b, a-b, ab \in F$, 且当 $b \neq 0$ 时, 有 $\frac{a}{b} \in F$, 则称 F 为一个数域, 给出以下四个命题:

① 0 是任何数域的元素;

② 若数域 F 有非零元素, 则 $2024 \in F$;

③ 集合 $P = \{x | x = 3k, k \in \mathbf{Z}\}$ 为数域;

④ 有理数集为数域.

其中真命题的个数为 _____.

第2讲 常用逻辑用语

课标要求

- 理解必要条件、充分条件、充要条件的意义, 理解性质定理与必要条件的关系、判定定理与充分条件的关系、数学定义与充要条件的关系.
- 理解全称量词与存在量词的意义, 能正确使用存在量词对全称量词命题进行否定, 能正确使用全称量词对存在量词命题进行否定.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 充分条件、必要条件与充要条件的概念

若 $p \Rightarrow q$, 则 p 是 q 的 _____ 条件, q 是 p 的 _____ 条件

p 是 q 的 _____ 条件	$p \Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$
p 是 q 的 _____ 条件	$p \not\Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$
p 是 q 的 _____ 条件	$p \Leftrightarrow q$
p 是 q 的 _____ 条件	$p \not\Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$

2. 全称量词与存在量词

(1) 全称量词: 在命题中, 诸如“所有”“每一个”“任意”“任何”“一切”这样的词叫作全称量词, 用符号“_____”表示.

(2) 存在量词: 在命题中, 诸如“有些”“有一个”“存在”这样的词叫作存在量词. 用符号“_____”表示.

3. 全称量词命题与存在量词命题

名称	全称量词命题	存在量词命题
结构	$\forall x \in M, x$ 具有性质 $p(x)$	$\exists x \in M, x$ 具有性质 $p(x)$
否定	$\exists x \in M, x$ 不具有性质 $p(x)$	$\forall x \in M, x$ 不具有性质 $p(x)$

4. 常用的正面叙述词语和它的否定词语

正面词语	等于(=)	大于(>)	小于(<)	是	
否定词语	不等于(\neq)	不大于(\leq)	不小于(\geq)	不是	
正面词语	都是	任意的	所有的	至多有一个	至少有一个
否定词语	不都是	某个	某些	至少有两个	一个也没有

对点演练

题组一 常识题

- [教材改编] 已知 $p: a \in P \cup Q, q: a \in P$, 则 p 是 q 的 _____ 条件.

2. [教材改编] 命题“任意两个等边三角形都相似”是_____量词命题. 它的否定是_____, 并且是_____ (填“真”或“假”)命题.
3. [教材改编] 已知 $\triangle ABC$ 的三边的长分别为 a, b, c , 且 $a \leq b \leq c$, 那么“ $a^2 + b^2 = c^2$ ”是“ $\triangle ABC$ 为直角三角形”的_____条件.

题组二 常错题

◆索引: 对充分必要条件判断错误; 全称量词命题或存在量词命题的否定出错; 充分、必要条件的推理考虑不全面.

4. 已知 $p: x < a, q: x - 2 \leq 0$.
- ①若 p 是 q 的充分不必要条件, 则实数 a 的取值范围是_____;
- ②若 p 是 q 的必要不充分条件, 则实数 a 的取值范围是_____.
5. 命题“奇数的立方是奇数”的否定是_____.
6. 已知 p 是 r 的充分不必要条件, s 是 r 的必要条件, q 是 s 的必要条件, 那么 p 是 q 的_____条件.

课堂考点探究

探究点一 充分条件与必要条件的判断

例1 (1) [2022·浙江卷] 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $\sin x = 1$ ”是“ $\cos x = 0$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

(2) [2023·重庆巴蜀中学月考] “ $x < 0$ ”是“ $\log_3(x+1) < 0$ ”的 ()

- A. 必要不充分条件
B. 充分不必要条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

(3) [2023·厦门二诊] 关于 x 的不等式 $ax^2 - 2x + 1 > 0$ 恒成立的充分不必要条件可以是 ()

- A. $a \geq 1$ B. $a > 1$
C. $0 < a < \frac{1}{2}$ D. $a > 2$

变式题 (1) [2023·江苏苏州中学月考] “ $a + b > 4$ ”是“ $a > 2$ 且 $b > 2$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

(2) [2023·山东德州三模] 已知 $p: x = -1, q:$ 向量 $\mathbf{a} = (1, x)$ 与 $\mathbf{b} = (x + 2, x)$ 共线, 则 p 是 q 的 ()

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

◆◆ 总结反思

充分条件、必要条件的两种判定方法

- (1) 定义法: 适用于定义、定理的判断问题;
(2) 集合法: 多适用于条件中涉及参数的取值范围的推断问题.

探究点二 充分条件与必要条件的应用

例2 (1) 设 α, β 为两个平面, 则 $\alpha // \beta$ 的充要条件是 ()

- A. α 内有无数条直线与 β 平行
B. α 内有两条相交直线与 β 平行
C. α 与 β 平行于同一条直线
D. α 与 β 垂直于同一个平面

(2) [2023·福州三中模拟] 设 $p: 4x - 3 < 1; q: x - (2a + 1) < 0$. 若 p 是 q 的充分不必要条件, 则 ()

- A. $a > 0$ B. $a > 1$
C. $a \geq 0$ D. $a \geq 1$

◆◆ 总结反思

充分条件、必要条件的应用一般表现在参数的求解问题上, 解题时通常把充分条件、必要条件或充要条件转化为集合之间的关系, 然后根据集合之间的关系列出关于参数的不等式(或不等式组)求解. 解题过程中要注意检验区间的端点值.

变式题 (1) 已知集合 $A = \left\{ x \mid \frac{x-2}{x+1} \leq 0 \right\}$, $x \in A$ 的一个必要条件是 $x \geq a$, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $a < 0$ B. $a \geq 2$
C. $a \leq -1$ D. $a \geq -1$

(2) 已知 $p: f(x) = x - a \ln x$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增; $q: a < m$. 若 p 是 q 的充分不必要条件, 则实数 m 的取值范围为_____.

探究点三 全称量词与存在量词

► 角度 1 全称量词命题与存在量词命题的真假判断

例 3 [2023 · 山西运城一模] 下列命题是真命题的为 ()

- A. $\exists x \in \mathbf{N}, 4x < -3$
B. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2 > 0$
C. $\forall x \in \mathbf{N}, 2^x > x^2$
D. $\exists x \in \mathbf{Z}, 3x - 2 = 0$

◆◆ 总结反思

全称量词命题与存在量词命题真假的判断方法:

命题名称	真假	判断方法一	判断方法二
全称量词命题	真	所有对象使命题为真	否定为假
	假	存在一个对象使命题为假	否定为真
存在量词命题	真	存在一个对象使命题为真	否定为假

变式题 下列命题中, 为真命题的是 ()

- A. $\exists x \in \mathbf{R}, \sin^2 \frac{x}{3} + \cos^2 \frac{x}{3} = \frac{1}{3}$
B. $\forall x \in (0, \pi), \sin x > \cos x$
C. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + x = -2$
D. $\forall x \in (0, +\infty), e^x > x + 1$

► 角度 2 含有一个量词的命题的否定

例 4 (1) $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), x > \sin x$ 的否定是 ()

- A. $\exists x \notin \left(0, \frac{\pi}{2}\right), x \leq \sin x$
B. $\exists x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), x \leq \sin x$
C. $\forall x \notin \left(0, \frac{\pi}{2}\right), x > \sin x$
D. $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), x \leq \sin x$

(2) 命题 p : 有的等差数列是等比数列, 则其否定为 ()

- A. 有的等差数列不是等比数列
B. 有的等比数列是等差数列
C. 所有的等差数列都是等比数列
D. 所有的等差数列都不是等比数列

◆◆ 总结反思

全称量词命题与存在量词命题的否定:

- ① 改写量词: 确定命题所含量词的类型, 省去量词的要结合命题的含义加上量词, 再对量词进行改写.
② 否定结论: 对原命题的结论进行否定.

变式题 (1) 命题 “ $\exists x > 0, e^x = x + 1$ ” 的否定是 ()

- A. $\forall x > 0, e^x \neq x + 1$
B. $\forall x \leq 0, e^x \neq x + 1$
C. $\exists x > 0, e^x \neq x + 1$
D. $\forall x > 0, e^x = x + 1$

(2) 17 世纪, 数学家费马提出猜想: “对任意正整数 $n > 2$, 关于 x, y, z 的方程 $x^n + y^n = z^n$ 没有正整数解”, 这个猜想被称为费马大定理. 则费马大定理的否定为 ()

- A. 对任意正整数 n , 关于 x, y, z 的方程 $x^n + y^n = z^n$ 都没有正整数解
B. 对任意正整数 $n > 2$, 关于 x, y, z 的方程 $x^n + y^n = z^n$ 至少存在一组正整数解
C. 存在正整数 $n \leq 2$, 关于 x, y, z 的方程 $x^n + y^n = z^n$ 至少存在一组正整数解
D. 存在正整数 $n > 2$, 关于 x, y, z 的方程 $x^n + y^n = z^n$ 至少存在一组正整数解

► 角度 3 含量词命题的应用

例 5 (1) 若 “ $\exists x \in [-1, 2], -x^2 + 2 \geq a$ ” 是假命题, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $a > 2$ B. $a \geq 2$
C. $a > -2$ D. $a \leq -2$

(2) 已知函数 $f(x) = x + \frac{4}{x} (x \in [\frac{1}{2}, 1])$, $g(x) = 2^x + a (x \in [2, 3])$, 若 $\forall x_1 \in [\frac{1}{2}, 1], \exists x_2 \in [2, 3], f(x_1) \leq g(x_2)$, 则实数 a 的取值范围是_____.

◆◆ 总结反思

根据命题的真假求参数的一般步骤:

- (1) 根据题目条件, 推出每一个命题的真假(有时不一定只有一种情况);
- (2) 求出每个命题是真命题时参数的取值范围;
- (3) 根据每个命题的真假情况, 求出参数的取值范围.

变式题 (1) 已知 $p: \exists x \in \mathbf{R}, ax^2 + 2x + 1 < 0$ 是假命题; $q: a \in (1, +\infty)$. 则 q 是 p 的 _____

条件. (从“充分不必要”“必要不充分”“充要”“既不充分也不必要”中选一个正确的填入)

(2) 若“ $\exists x \in [1, 2], 2x^2 - \lambda x + 1 < 0$ ”是假命题, 则实数 λ 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 2\sqrt{2}]$ B. $[2\sqrt{2}, \frac{9}{2}]$
 C. $(-\infty, 3]$ D. $[\frac{9}{2}, +\infty)$

第3讲 不等式的性质

课标要求

梳理等式的性质, 理解不等式的概念, 掌握不等式的性质.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 两个实数比较大小的方法

$$\text{基本事实} \begin{cases} a > b \Leftrightarrow a - b > 0 \\ a = b \Leftrightarrow a - b = 0 \\ a < b \Leftrightarrow a - b < 0 \end{cases}$$

2. 不等式的性质

(1) 传递性: $a > b, b > c \Rightarrow a > c$. (单向性)

(2) 可加性: $a > b \Leftrightarrow a + c$ _____ $b + c$. (双向性)

(3) 可乘性: $a > b, c > 0 \Rightarrow ac$ _____ bc ;
 $a > b, c < 0 \Rightarrow ac$ _____ bc .

(4) $a > b, c > d \Rightarrow$ _____ . (单向性)

(5) $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac$ _____ bd ; (单向性)

如果 $a > b > 0, c < d < 0$, 那么 $ac < bd$.

(6) 乘方法则: $a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ ($n \in \mathbf{N}_+, n \geq 2$), (单向性)

特殊地, $a > b > 0 \Rightarrow a^n$ _____ b^n ($n \in \mathbf{N}, n \geq 2$).

◆◆ 常用结论

1. 若 $a < x < b, c < y < d$, 则 $a - d < x - y < b - c$.

2. 若 $\frac{a}{b} < 1, a, b, m > 0$, 则 $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m} < 1$;

若 $\frac{a}{b} > 1, a, b, m > 0$, 则 $\frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m} > 1$.

对点演练

题组一 常识题

1. [教材改编] 设 $t = a + 2b, s = a + b^2 + 1$, 则 s 与 t 的大小关系是 _____.

2. [教材改编] 已知 $2 < a < 3, -2 < b < -1$, 则 $2a + b$ 的取值范围为 _____.

3. [教材改编] 下列命题中为真命题的是 _____ . (填写序号)

① 若 $a > b > 0$, 则 $ac^2 > bc^2$;

② 若 $a < b < 0$, 则 $a^2 > ab > b^2$;

③ 若 $a > b > 0$ 且 $c < 0$, 则 $\frac{c}{a^2} > \frac{c}{b^2}$;

④ 若 $a > b$ 且 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 则 $ab < 0$.

题组二 常错题

◆ 索引: 求取值范围时乱用不等式的加法法则致错; 乘法运算时不注意符号的影响致错; 运用作差法时对差的变形不彻底或变形方向不明确致错.

4. 已知 $-1 < x < 4, 2 < y < 3$, 则 $x - y$ 的取值范围是 _____.

5. 已知实数 $a \in (-3, 1), b \in (\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$, 则 $\frac{a}{b}$ 的取值范围是 _____.

6. 设 $p = 1 + 2x^4, q = 2x^3 + x^2$, 则 p, q 的大小关系是 _____.

探究点一 比较数(式)的大小

例1 (1) 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 比较 $(x^2 - y^2)^2$ 与 $xy(x - y)^2$ 的大小.

(2) 已知 a, b 都是正数, 试比较 $a^a b^b$ 与 $a^b b^a$ 的大小.

◆◆ 总结反思

(1) 判断两个式子大小关系的常用方法: 作差法、作商法、不等式性质法、函数单调性法、中间量法、特殊值法等.

(2) 作差(商)法的一般步骤是: 作差(商), 变形, 定号, 得出结论.

变式题 (1) [2023·福建三明一模] 已知 $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{7} - \sqrt{3}, c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$
C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

(2) 若 $a = \frac{\ln 3}{3}, b = \frac{\ln 4}{4}, c = \frac{\ln 5}{5}$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$
C. $c < a < b$ D. $b < a < c$

探究点二 不等式的性质

例2 (1) [2023·合肥一模] 已知 $a > b > c > d > 0$, 且 $a + d = b + c$, 则下列不等式中不成立的是 ()

- A. $a + c > b + d$ B. $ac > bd$
C. $ad < bc$ D. $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

(2) (多选题) 若 $\frac{c^3}{a} < \frac{c^3}{b} < 0$, 则 ()

- A. $|a| < |b|$ B. $ac < bc$
C. $\frac{a-b}{c} > 0$ D. $0 < \frac{a}{b} < 1$

◆◆ 总结反思

解决不等式有关问题常用的三种方法:

(1) 直接利用不等式的性质逐个验证, 利用不等式的性质判断不等式是否成立时要特别注意前提条件;

(2) 利用特殊值法排除错误答案;

(3) 构造函数, 利用函数的单调性.

变式题 (1) (多选题) [2023·海口模拟] 下列四个条件中, 是 $x > y$ 的充分不必要条件的是 ()

- A. $xc^2 > yc^2$ B. $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} < 0$
C. $|x| > |y|$ D. $\ln x > \ln y$

(2) 已知 $a > b$, 则下列不等式中一定成立的是 ()

- A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $a^2 > b^2$
C. $\ln a > \ln b$ D. $2^{a-b} > 1$

(3) (多选题) [2023·湖南长郡中学二模] 已知实数 a, b, c 满足 $0 < a < b < c$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $\frac{1}{c-a} > \frac{1}{b-a}$
B. $\frac{b}{a} > \frac{b+c}{a+c}$
C. $\frac{1}{a(c-a)} > \frac{1}{b(c-a)}$
D. $ab + c^2 > ac + bc$

探究点三 利用不等式性质求取值范围

例3 (1) 已知三个正数 a, b, c 满足 $a \leq b + c \leq 2a, b \leq a + c \leq 2b$, 则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是 ()

- A. $[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}]$ B. $[\frac{3}{2}, +\infty)$
C. $[2, 3]$ D. $[1, 2]$

(2) 若 $-1 < a + b < 3, 2 < a - b < 4$, 则 $2a + 3b$ 的取值范围为_____.

◆◆ 总结反思

求代数式的取值范围需注意两点:(1)严格运用不等式的性质;(2)利用整体思想,通过“一次性”不等关系的运算求解范围,防止在多次运用不等式的性质时扩大变量的取值范围.

变式题 已知实数 x, y 满足 $-1 \leq x + y \leq 3, 4 \leq 2x - y \leq 9$, 则 ()

- A. $1 \leq x \leq 3$ B. $-2 \leq y \leq 1$
C. $2 \leq 4x + y \leq 15$ D. $\frac{1}{3} < x - y < \frac{23}{3}$

第4讲 基本不等式

课标要求 掌握基本不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ($a, b > 0$). 结合具体实例,能用基本不等式解决简单的最大值或最小值问题.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 基本不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

- (1)基本不等式成立的条件:_____.
(2)等号成立的条件:当且仅当_____时取等号.

(3)_____称为 a, b 的算术平均值, \sqrt{ab} 称为 a, b 的几何平均值.

2. 几个重要的不等式

- (1) $a^2 + b^2 \geq$ _____ ($a, b \in \mathbf{R}$).
(2) $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq$ _____ (a, b 同号).
(3) $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ($a, b \in \mathbf{R}$).
(4) $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$ ($a, b \in \mathbf{R}$).

3. 利用基本不等式求最值

已知 $x > 0, y > 0$.

(1)若 $x + y = s$ (s 为定值),则当且仅当 $x = y$ 时, xy 取得最大值 $\frac{s^2}{4}$ (简记:和定积最大).

(2)若 $xy = p$ (p 为定值),则当且仅当 $x = y$ 时, $x + y$ 取得最小值 $2\sqrt{p}$ (简记:积定和最小).

注意:利用不等式求最值应满足三个条件“一正、二定、三相等”.

◆◆ 常用结论

1. 若 $a > 0, b > 0$, 则 $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq$

$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$, 当且仅当 $a = b$ 时, 等号成立.

2. 当 $x > 0$ 时, 函数 $y = x + \frac{a}{x}$ ($a > 0$) 在 $x = \sqrt{a}$ 处取得最小值 $2\sqrt{a}$; 当 $x < 0$ 时, 函数 $y = x + \frac{a}{x}$ ($a > 0$) 在 $x = -\sqrt{a}$ 处取得最大值 $-2\sqrt{a}$.

对点演练

题组一 常识题

1. [教材改编] 当 $x =$ _____ 时, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 取得最小值 _____.
2. [教材改编] 已知 $x > 1$, 则 $x + \frac{1}{x-1}$ 的最小值为 _____.
3. [教材改编] 用篱笆围一个面积为 100 m^2 的矩形菜园, 则当所用篱笆最短时, 所用篱笆的长度是 _____ m; 若矩形菜园一边靠墙, 墙的长度为 9 m , 则当矩形和墙平行的边长为 _____ m 时, 所用篱笆最短.

题组二 常错题

◆索引:对于基本不等式的应用,注意字母的正负以及等号成立的条件;等号不成立时,通常考虑利用函数的单调性求解.

4. 函数 $f(x) = 2x + \frac{8}{x} + 1$ ($x < 0$) 的最大值为 _____.
5. 当 $x \geq 2$ 时, $x + \frac{4}{x+2}$ 的最小值为 _____.

探究点一 直接用基本不等式

例 1 (1) 已知 x, y 都是正数, 且 $x \neq y$, 则下列选项不恒成立的是 ()

- A. $\frac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$ B. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2$
 C. $\frac{2xy}{x+y} < \sqrt{xy}$ D. $xy + \frac{1}{xy} > 2$

(2) (多选题) [2023 · 山东济宁二模] 已知 $m > 0, n > 0$, 且 $m+n=2mn$, 则下列结论中正确的是 ()

- A. $mn \geq 1$ B. $m+n \leq \sqrt{2}$
 C. $m^2+n^2 \geq 2$ D. $2m+n \geq 3+2\sqrt{2}$

◆◆ 总结反思

利用基本不等式比较大小, 主要有两个思路: 一是直接建立不等关系比较大小; 二是观察待比较式子的结构特征, 合理选取基本不等式或其变形形式, 结合不等式的性质比较大小.

变式题 (1) 下列不等式中, 一定成立的是 ()

- A. $x + \frac{4}{x} \geq 4$ B. $\ln x + \frac{1}{\ln x} \geq 2$
 C. $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ D. $2^x + 2^{-x} \geq 2$

(2) (多选题) 已知 $a > 0, b > 0, a^2 + b^2 - ab = 2$, 则下列不等式恒成立的是 ()

- A. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \sqrt{2}$ B. $ab \leq 2$
 C. $a+b \leq 2\sqrt{2}$ D. $a^2 + b^2 \geq 4$

探究点二 变形用基本不等式求最值

微课1·方法

微点 1 配凑法

例 2 (1) 设实数 x 满足 $x > 0$, 则函数 $y = 2 + 3x + \frac{4}{x+1}$ 的最小值为 ()

- A. $4\sqrt{3}-1$ B. $4\sqrt{3}+2$
 C. $4\sqrt{2}+1$ D. 6

(2) 已知 $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $x\sqrt{1-2x^2}$ 的最大值为

◆◆ 总结反思

基本不等式具有将“和式”转化为“积式”和将“积式”转化为“和式”的放缩功能, 利用基本不等式求最值时, 要根据式子的特征灵活变形, 先配凑出积、和为常数的形式, 再利用基本不等式求解.

微点 2 常数代换法

例 3 (1) [2023 · 河北邯郸一模] 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a+b=2$, 则 $\frac{2}{a+1} + \frac{8}{b+1}$ 的最小值是 ()

- A. 2 B. 4 C. $\frac{9}{2}$ D. 9

(2) 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $ab=1$, 则 $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{8}{a+b}$ 的最小值为 _____.

◆◆ 总结反思

常数代换法主要解决形如“已知 $x+y=t$ (t 为常数), 求 $\frac{a}{x} + \frac{b}{y}$ 的最值”的问题, 通常先将 $\frac{a}{x} + \frac{b}{y}$ 转化为 $(\frac{a}{x} + \frac{b}{y}) \cdot \frac{x+y}{t}$, 再用基本不等式求最值.

微点 3 消元法

例 4 (1) 已知正实数 a, b 满足 $2a+b=ab$, 则 $\frac{a}{4} - \frac{2}{b}$ 的最小值为 ()

- A. 0 B. 2 C. 4 D. 6

(2) [2023 · 江苏镇江二模] 已知 $xy > 0$, 且 $x^2 + 2xy = 1$, 则 $x^2 + y^2$ 的最小值为 _____.

◆◆ 总结反思

消元法, 即根据条件建立两个量之间的函数关系, 然后代入代数式转化为函数的最值求解. 有时会出现多元的问题, 解决方法是消元后利用基本不等式求解.

应用演练

1. 【微点 1】 [2023 · 福建南平一模] 若函数

$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} (x > 2)$ 在 $x = a$ 处取最小值, 则 $a =$ ()

- A. $1 + \sqrt{5}$ B. 2
 C. 4 D. 6

2. 【微点2】[2023·江苏连云港二模] 已知 $x+y=1, x>0, y>0$, 则 $\frac{1}{2x} + \frac{x}{y+1}$ 的最小值为 ()

A. $\frac{5}{4}$ B. 0

C. 1 D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 【微点1、微点3】已知正实数 a, b 满足 $ab+2a-2=0$, 则 $4a+b$ 的最小值是 ()

A. 2 B. $4\sqrt{2}-2$

C. $4\sqrt{3}-2$ D. 6

4. 【微点2】(多选题)[2024·江苏扬州模拟] 已知 $a>0, b>0$ 且 $a+b=\sqrt{2}$, 则下列式子中一定成立的是 ()

A. $a^2+b^2 \geq 1$ B. $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$

C. $2^{a-b} > \frac{1}{2}$ D. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 2^{\frac{3}{4}}$

5. 【微点1】已知 $0 < x < 1$, 则当 $x(4-3x)$ 取得最大值时, x 的值为_____.

6. 【微点3】已知 $x > 0, y > 0, \frac{1}{x} + y = 2$, 则 $\frac{x}{y}$ 的最小值为_____.

探究点三 基本不等式的实际应用

例5 为响应国家扩大内需的政策, 某厂家拟在2024年举行促销活动, 经调查测算, 该产品的年销量(即该厂的年产量) x (单位: 万件) 与年促销费用 t ($t \geq 0$, 单位: 万元) 满足 $x = 4 - \frac{k}{2t+1}$ (k 为常数). 如果不搞促销活动, 则该产品的年销量只能是1万件. 已知2024年生产该产品的固定投入为6万元, 每生产1万件该产品需要再投入12万元, 该厂家将每件产品的销售价格定为每件产品平均成本的1.5倍(产品成本包括固定投入和再投入两部分).

(1) 设该厂家2024年该产品的年利润为 y 万元, 求 y 关于 t 的函数关系式.

(2) 该厂家2024年该产品的年促销费用为多少万元时该产品的年利润最大?

◆◆ 总结反思

有关函数最值的实际问题的解题技巧

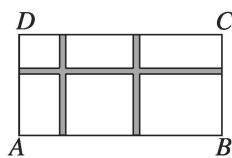
(1) 根据实际问题建立函数的解析式, 再利用基本不等式求得函数的最值.

(2) 设变量时一般要把求最大值或最小值的变量定义为函数.

(3) 解应用题时, 一定要注意变量的实际意义及其取值范围.

(4) 在应用基本不等式求函数最值时, 若等号取不到, 可利用函数的单调性求解.

变式题 (1) [2023·湖南名校联考] 某社区计划在一块空地上种植花卉, 已知这块空地是



面积为 1800 m^2 的矩形 $ABCD$,

为了方便居民观赏, 在这块空地中间修了如图所示的三条宽度为 2 m 的人行通道, 则种植花卉区域的面积的最大值是 ()

A. 1208 m^2 B. 1448 m^2

C. 1568 m^2 D. 1698 m^2

(2) 一家物流公司计划建立仓库储存货物, 经过市场了解到下列信息: 每月的土地占地费 y_1 (单位: 万元) 与仓库到车站的距离 x (单位: km) 成反比, 每月的库存货物费 y_2 (单位: 万元) 与仓库到车站的距离 x (单位: km) 成正比. 若在距离车站 10 km 处建立仓库, 则每月的土地占地费和库存货物费分别为 4 万元和 16 万元, 则要使两项费用之和最小, 仓库到车站的距离应为_____ km.

第5讲 一元二次不等式

课标要求

1. 会结合一元二次函数的图象,判断一元二次方程实根的存在性及实根的个数,了解函数的零点与方程根的关系.
2. 经历从实际情境中抽象出一元二次不等式的过程,了解一元二次不等式的现实意义.能借助一元二次函数求解一元二次不等式,并能用集合表示一元二次不等式的解集.
3. 借助一元二次函数的图象,了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 一元二次不等式

一般地,形如 $ax^2 + bx + c > 0$ 的不等式称为一元二次不等式,其中 a, b, c 是常数,而且 $a \neq 0$.

2. 三个“二次”间的关系

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的图象			
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$) 的根	有两个不相等的实数根 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)	有两个相等实数根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$) 的解集	_____	_____	_____
$ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$) 的解集	_____	_____	_____

3. 分式不等式

$$(1) \frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) > 0;$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) < 0.$$

$$(2) \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \geq 0, \\ g(x) \neq 0; \end{cases}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \leq 0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$$

常用结论

1. 绝对值不等式 $|x| > a$ ($a > 0$) 的解集为 $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$, 绝对值不等式 $|x| < a$ ($a > 0$) 的解集为 $(-a, a)$.
2. (1) 对于不等式 $ax^2 + bx + c > 0$, 求解时不要忘记讨论 $a = 0$ 时的情形;
(2) 注意区分 $\Delta < 0$ 时, $ax^2 + bx + c > 0$ ($a \neq 0$) 的解集为 \mathbf{R} 还是 \emptyset .

对点演练

题型一 常识题

1. [教材改编] 不等式 $x^2 - 5x - 6 \geq 0$ 的解集为 _____.
2. [教材改编] 若一元二次不等式 $2kx^2 + kx - \frac{3}{8} < 0$ 对于一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则 k 的取值范围为 _____.
3. [教材改编] 若关于 x 的不等式 $-x^2 + bx + c < 0$ 的解集是 $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > 4\}$, 则关于 x 的不等式 $cx^2 - bx - 1 > 0$ 的解集是 _____.

题型二 常错题

- ◆ 索引: 变形必须等价; 注意二次项系数的符号; 讨论参数时不要忽视二次项的系数.
4. 不等式 $x(x+3) < 2(x+3)$ 的解集为 _____.
 5. 不等式 $(x+1)(2-x) \geq 0$ 的解集为 _____.
 6. 若关于 x 的不等式 $ax^2 + 2x + 1 < 0$ 有实数解, 则 a 的取值范围是 _____.

探究点一 一元二次不等式的求解**► 角度1 不含参的不等式****例1** (1) 不等式 $\frac{2x+1}{3-x} \geq 1$ 的解集为 _____.(2) 不等式组 $0 < x^2 - x - 2 \leq 4$ 的解集为 _____.**◆◆ 总结反思**

解一元二次不等式的一般步骤是:①化为标准形式($a > 0$);②确定判别式 Δ 的符号,若 $\Delta \geq 0$,则求出该不等式对应的一元二次方程的根,若 $\Delta < 0$,则对应的一元二次方程无根;③结合二次函数的图象得出不等式的解集.特别地,若一元二次不等式的左边能因式分解,则可直接写出不等式的解集.

► 角度2 含参的不等式**例2** 解关于 x 的不等式 $ax^2 - 2(a+1)x + 4 < 0$.**◆◆ 总结反思**

含有参数的不等式的求解,往往需要对参数进行分类讨论.

①若二次项系数为常数,首先确定二次项系数是否为正数,再考虑分解因式,对参数进行分类讨论,若不易分解因式,则可依据判别式符号进行分类讨论.

②若二次项系数为参数,则应先考虑二次项系数是否为零,确定不等式是不是二次不等式,然后再讨论二次项系数不为零的情形,以便确定解集的形式.

③对方程的根进行讨论,比较大小,以便写出解集.

变式题 解关于 x 的不等式 $x^2 - 4x - t(t-4) < 0$ ($t \in \mathbf{R}$).

探究点二 一元二次不等式恒成立问题**► 角度1 在 \mathbf{R} 上的恒成立问题****例3** 若不等式 $(a-1)x^2 + (a-1)x + a > 0$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $a < -\frac{1}{3}$ 或 $a > 1$ B. $a > 1$
- C. $a \geq 1$ D. $-\frac{1}{3} < a \leq 1$

◆◆ 总结反思

(1)若关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0(a\neq 0)$ 恒成立,则

$$\text{满足} \begin{cases} a>0, \\ \Delta=b^2-4ac<0. \end{cases}$$

(2)若关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c<0(a\neq 0)$ 恒成立,则

$$\text{满足} \begin{cases} a<0, \\ \Delta=b^2-4ac<0. \end{cases}$$

(3)若关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 恒成立,则首先考虑 $a=0$ 时是否满足.

变式题 若不等式 $mx^2+mx-4<2x^2+2x-1$ 对任意实数 x 恒成立,则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-2,2)$
 B. $(-10,2]$
 C. $(-\infty,-2)\cup[2,+\infty)$
 D. $(-\infty,-2]$

► 角度 2 在给定区间上的恒成立问题

例 4 对任意的 $x\in(1,4)$,不等式 $ax^2-2x+2>0$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $[1,+\infty)$ B. $(\frac{1}{2},1)$
 C. $[\frac{1}{2},+\infty)$ D. $(\frac{1}{2},+\infty)$

◆◆ 总结反思

(1)一元二次不等式在给定区间上的恒成立问题,其本质是将不等式恒成立问题转化为最大(小)值问题,即 $f(x)\geq 0(x\in[a,b])$ 恒成立等价于 $f(x)_{\min}\geq 0(x\in[a,b]),f(x)\leq 0(x\in[a,b])$ 恒成立等价于 $f(x)_{\max}\leq 0(x\in[a,b])$.

(2)若所给的不等式能通过恒等变形使参数与变量分离于不等式的两端,则可避免分类讨论,直接求出参数范围.

变式题 设函数 $f(x)=mx^2-mx-1$,若对于任意 $x\in[1,3],f(x)<-m+4$ 恒成立,则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty,0]$
 B. $[0,\frac{5}{7})$
 C. $(-\infty,\frac{5}{7})$
 D. $(-\infty,0)\cup(0,\frac{5}{7})$

► 角度 3 给定参数范围的恒成立问题

例 5 若对任意 $m\in[-1,1]$,函数 $f(x)=x^2+(m-4)x+4-2m$ 的值恒大于零,则 x 的取值范围是 ()

- A. $(1,3)$
 B. $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$
 C. $(1,2)$
 D. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

◆◆ 总结反思

利用变换主元法解决一元二次不等式在给出参数取值范围情况下的恒成立问题时,一定要搞清谁是变换后的主元,谁是变换后的参数,一般地,知道谁的范围,谁就是变换后的主元,求谁的范围,谁就是变换后的参数.

变式题 若不等式 $x^2-ax\geq 16-3x-4a$ 对任意 $a\in[-2,4]$ 恒成立,则 x 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty,-8]\cup[3,+\infty)$
 B. $(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$
 C. $[-8,6]$
 D. $(0,3]$

探究点三 一元二次方程根的分布

例 6 关于 x 的方程 $x^2+(m-3)x+m=0$ 满足下列条件,求 m 的取值范围.

- (1)有两个正根;
- (2)一个根大于 1,一个根小于 1;
- (3)一个根在 $(-2,0)$ 内,另一个根在 $(0,4)$ 内;
- (4)一个根小于 2,一个根大于 4;
- (5)两个根都在 $(0,2)$ 内.

◆◆ 总结反思

设函数 $f(x) = ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$.

分布情况	两根都在 (m, n) 内	两根有且仅有一根在 (m, n) 内	一根在 (m, n) 内, 另一根在 (p, q) 内
大致图象 $(a > 0)$			
得出的结论	$\begin{cases} \Delta \geq 0, \\ f(m) > 0, \\ f(n) > 0, \\ m < -\frac{b}{2a} < n \end{cases}$	$f(m) \cdot f(n) < 0$	$\begin{cases} f(m) > 0, \\ f(n) < 0, \\ \text{或} \\ f(p) < 0, \\ f(q) > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} f(m)f(n) < 0, \\ f(p)f(q) < 0 \end{cases}$
大致图象 $(a < 0)$			
得出的结论	$\begin{cases} \Delta \geq 0, \\ f(m) < 0, \\ f(n) < 0, \\ m < -\frac{b}{2a} < n \end{cases}$	$f(m) \cdot f(n) < 0$	$\begin{cases} f(m) < 0, \\ f(n) > 0, \\ \text{或} \\ f(p) > 0, \\ f(q) < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} f(m)f(n) < 0, \\ f(p)f(q) < 0 \end{cases}$

变式题 (1) [2023·江苏连云港一模] 已知方程 $x^2 + (m-2)x + 5 - m = 0$ 有两个不相等的实数根, 且两个实数根都大于 2, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-5, -4) \cup (4, +\infty)$
 B. $(-5, +\infty)$
 C. $(-5, -4)$
 D. $(-4, -2) \cup (4, +\infty)$

(2) 设 $a \in \mathbf{R}$, 关于 x 的方程 $7x^2 - (a+13)x + a^2 + a - 2 = 0$ 有两实数根 x_1, x_2 , 且 $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$, 则实数 a 的取值范围是_____.

探究点四 二次函数的零点问题

例 7 (1) [2023·宁波一模] 若函数 $f(x) = x^2 + mx + n$ 在区间 $(-1, 1)$ 上有两个零点, 则 $n^2 - m^2 + 2n + 1$ 的取值范围是 ()

- A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$
 C. $(0, 4)$ D. $(1, 4)$

(2) (多选题) [2023·山西长治质检] 已知函数 $y = x^2 + ax + b (a > 0)$ 有且只有一个零点, 则下列说法正确的是 ()

- A. $a^2 - b^2 \leq 4$
 B. $a^2 + \frac{1}{b} \geq 4$
 C. 若关于 x 的不等式 $x^2 + ax - b < 0$ 的解集为 (x_1, x_2) , 则 $x_1 x_2 > 0$
 D. 若关于 x 的不等式 $x^2 + ax + b < c$ 的解集为 (x_1, x_2) , 且 $|x_1 - x_2| = 4$, 则 $c = 4$

◆◆ 总结反思

已知二次函数的零点所在区间求参数值(取值范围)常用的方法

(1) 直接法: 直接求解方程得到方程的根, 再通过解不等式确定参数范围.

(2) 数形结合法: 结合二次函数的性质与零点存在定理, 作出大致图象, 得到关于参数的不等式组, 求解可确定参数范围.

变式题 (多选题) 设 $f(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, 若 $a + b + c = 0, f(0) \cdot f(1) > 0$, 则下列说法正确的是 ()

- A. $a \neq 0$
 B. 方程 $f(x) = 0$ 有实根, 且 $-2 < \frac{b}{a} < -1$
 C. 设 x_1, x_2 是方程 $f(x) = 0$ 的两个实根, 则

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \leq |x_1 - x_2| < \frac{2}{3}$$

D. 方程 $f(x) = 0$ 在 $(0, 1)$ 内有且只有一个实根

2. 【微点 1】[2023 · 广东珠海期末] 设函数

$$f(x) = e^{x-1} - e^{1-x} + \frac{1}{2} \sin \pi x, \text{ 实数 } a, b \text{ 满足}$$

不等式 $f(3a+b) + f(1-a) > 0$, 则下列不等式成立的是 ()

- A. $2a+b > 1$
 B. $2a+b < 1$
 C. $4a+b > 3$
 D. $4a+b < 3$

3. 【微点 2、微点 3】已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 若 $f(2x+1)$ 为偶函数, 且 $f(x) + f(4-x) = 2, f(1) = 2$, 则 $\sum_{n=1}^{22} f(n) =$ ()

$$\sum_{n=1}^{22} f(n) = \quad ()$$

- A. 23
 B. 22
 C. 19
 D. 18

4. 【微点 2、微点 3】[2024 · 江苏南京六校调研]

已知定义在 \mathbf{R} 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(1-x) = -f(1+x)$, 则下列说法正确的是 ()

- A. $f\left(\frac{3}{2}\right) = -f\left(\frac{5}{2}\right)$
 B. 函数 $f(x)$ 的一个周期为 2
 C. $f(2023) = 0$
 D. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称

5. 【微点 3】写出一个最小正周期为 1 的偶函数:

$$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$$



思维拓展 (一)

逻辑推理之抽象函数的性质

抽象函数主要有两个研究方向: 一是由抽象函数结构、性质, 联想已学过的基本函数, 再由基本函数的相关结论, 预测、猜想抽象函数可能有的相关结论. 二是根据给出的抽象函数性质, 推导其特殊的性质和关系. 考题多和函数的性质(单调性、奇偶性、周期性等)相结合, 以小题的方式考查.

例 [2022 · 新高考全国 II 卷] 若函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$,

$$f(1) = 1, \text{ 则 } \sum_{k=1}^{22} f(k) = \quad (A)$$

- A. -3 B. -2 C. 0 D. 1

【深度挖掘】

[解法一] 令 $x=1, y=0$, 得 $2f(1) = f(1)f(0)$, 所以 $f(0) = 2$. 令 $y=1$, 得 $f(x+1) + f(x-1) = f(x)f(1)$, 所以 $f(x+1) + f(x-1) = f(x)$, 即 $f(x+1) = f(x) - f(x-1)$, 所以 $f(x+2) = f(x+1) - f(x)$, 所以 $f(x+2) = -f(x-1)$, 即 $f(x+3) = -f(x)$, 所以 $f(x) = -f(x+3) = f(x+6)$, 即 $f(x)$ 是周期为 6 的周期函数. 因为 $f(0) = 2, f(1) = 1, f(2) = f(1) - f(0) = -1, f(3) = -f(0) = -2, f(4) = -f(1) = -1, f(5) = -f(2) = 1, f(6) = f(0) = 2$, 所以 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = [f(1) + f(2) + \dots + f(18)] + [f(19) + f(20) + f(21) + f(22)] = f(19) + f(20) + f(21) + f(22) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = -3$.

[解法二] 取 $f(x) = 2\cos \frac{\pi}{3}x$ 符合条件, 则 $T =$

6, 计算可得 $f(2) = -1, f(3) = -2, f(4) = -1,$

$f(5) = 1, f(6) = 2$, 所以 $\sum_{k=1}^6 f(k) = 1 - 1 - 2 - 1 +$

$1 + 2 = 0$, 所以 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1 - 1 - 2 - 1 = -3$.

◆◆ 总结反思

解决抽象函数问题的常用方法:

方法一(通法)

1. 赋值, 特殊值代入求值, 如令 $x = -1, 0, 1$.

2. 通过函数式得到抽象函数的性质:

(1) 通过 $f(x_1) - f(x_2)$ 的变换判断单调性;

(2) 令式子中出现 $f(x)$ 和 $f(-x)$, 判断函数的奇偶性;

(3) 换 x 为 $x+T$ 确定是否具有周期性.

方法二(模型化)

结合具体函数, 使得抽象函数具体化, 常见的有:

(1) $f(p+q) = f(p) + f(q)$ —— $y = kx$;

(2) $f(p+q) = f(p)f(q)$ —— $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$;

(3) $f(pq) = f(p) + f(q)$ —— $y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$;

(4) $f(pq) = f(p)f(q)$ —— $y = x^n (n \text{ 为常数})$;

(5) $f(p+q) = \frac{f(p)+f(q)}{1-f(p)f(q)} \implies y = \tan x$;

(6) $f(p+q) + f(p-q) = 2f(p)f(q) \implies y = \cos \omega x$.

注意转化与化归策略、迭代策略、数形结合策略等的运用.

【针对训练】

1. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, $f(x)$ 不恒为零且对任意实数 x 都有 $xf(x+1) = (x+1)f(x)$, 则 $f\left(\frac{2025}{2}\right)$ 的值是 ()
- A. 0 B. $\frac{1}{2}$
- C. 1 D. $\frac{5}{2}$
2. (多选题)[2024·山西忻州名校联考] 已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(xy) = f(x) + f(y)$, 且 $f(4) = 12$, 当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$, 则 ()
- A. $f(1) = 0$
- B. $f(x)$ 是偶函数

C. $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增

D. 不等式 $f(x+3) - f\left(\frac{2}{x}\right) < 6$ 的解集是 $(0, 1)$

3. (多选题)[2024·九省联考] 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$, 若 $f(x+y) + f(x)f(y) = 4xy$, 则 ()
- A. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$
- B. $f\left(\frac{1}{2}\right) = -2$
- C. 函数 $f\left(x - \frac{1}{2}\right)$ 是偶函数
- D. 函数 $f\left(x + \frac{1}{2}\right)$ 是减函数
4. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$, 若 $f(3) = 2$, 则 $f(15) = \underline{\hspace{2cm}}$.

第9讲 二次函数与幂函数

课标要求

1. 二次函数

- (1) 掌握二次函数的图象与性质(单调性、对称性、顶点、最值);
- (2) 了解二次函数的广泛应用.

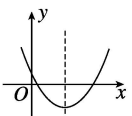
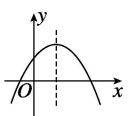
2. 幂函数

通过具体实例, 结合 $y=x, y=\frac{1}{x}, y=x^2, y=\sqrt{x}, y=x^3$ 的图象, 理解它们的变化规律, 了解幂函数.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 二次函数的图象和性质

解析式	$y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$)	$y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$)
图象		
定义域	\mathbf{R}	\mathbf{R}
值域	$\underline{\hspace{2cm}}$	$\underline{\hspace{2cm}}$

(续表)

解析式	$y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$)	$y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$)
单调性	在 $\underline{\hspace{2cm}}$ 上单调递减, 在 $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ 上单调递增	在 $\underline{\hspace{2cm}}$ 上单调递增, 在 $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ 上单调递减
顶点坐标	$\underline{\hspace{2cm}}$	
奇偶性	当 $\underline{\hspace{2cm}}$ 时为偶函数	
对称轴方程	$x = -\frac{b}{2a}$	

应用演练

1. 【微点1】已知 $a = 3^{\frac{1}{3}}, b = \log_2 \frac{1}{3}, c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{e}$, 则 ()
- A. $a > c > b$ B. $c > a > b$
C. $a > b > c$ D. $c > b > a$
2. 【微点1】若 $a = \log_3 6, b = 2, c = \log_{0.25} 0.125$, 则 ()
- A. $a > c > b$ B. $a > b > c$
C. $b > c > a$ D. $b > a > c$
3. 【微点3】已知函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(3x^2 - ax + 8)$ 在 $[-1, +\infty)$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -6]$ B. $[-11, -6]$
C. $(-11, -6]$ D. $(-11, +\infty)$

4. 【微点2、微点3】[2024·重庆南开中学质检]

已知函数 $f(x) = \log_2 \frac{1+x}{1-x} + \sin x$, 则不等式

$f(x) + f(2x+1) < 0$ 的解集为 ()

- A. $(-\infty, -\frac{1}{3})$ B. $(-1, -\frac{1}{3})$

- C. $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ D. $(-1, -\frac{1}{2})$

5. 【微点2】已知 $\log_a \frac{1}{2} < \log_a a^2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 则实数 a 的取值范围为_____.

增分微课1 指、对、幂函数之比较大小

类型一 直接利用单调性

- 例1 (1) [2023·南昌模拟] 已知 $a = \log_4 1.25, b = \log_5 1.2, c = \log_4 8$, 则 ()
- A. $c > a > b$ B. $c > b > a$
C. $a > b > c$ D. $a > c > b$
- (2) 已知 $a = \log_4 7, b = \log_9 30, c = e^{\ln \frac{3}{2}}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()
- A. $a < b < c$ B. $c < a < b$
C. $a < c < b$ D. $c < b < a$

◆◆ 总结反思

- ①底数相同, 指数不同时, 如 a^{x_1} 和 a^{x_2} , 利用指数函数 $y = a^x$ 的单调性比较大小;
- ②指数相同, 底数不同时, 如 x_1^a 和 x_2^a , 利用幂函数 $y = x^a$ 的单调性比较大小;
- ③底数相同, 真数不同时, 如 $\log_a x_1$ 和 $\log_a x_2$, 利用对数函数 $y = \log_a x$ 的单调性比较大小.

类型二 借助中间量

- 例2 (1) 已知 $a = 3^{0.2}, b = 0.2^3, c = \log_3 0.2$, 则 ()
- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$
C. $c > a > b$ D. $b > c > a$
- (2) [2023·沈阳三模] 已知 $a = \log_5 3, b = \log_{13} 8, c = e^{-\frac{1}{2}}$, 则下列判断正确的是 ()
- A. $a < b < c$
B. $a < c < b$
C. $c < a < b$
D. $b < c < a$

◆◆ 总结反思

底数、指数、真数都不同时, 寻找中间量 0, 1 或者其他能判断大小关系的中间量 (如 $\frac{1}{2}$), 借助中间量进行大小关系的比较.

类型三 作差(商)比法

例3 (1)[2023·安徽铜陵三模] 已知 $a = \log_7 5$, $b = \log_9 7$, $c = \log_{11} 9$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$
 C. $b < a < c$ D. $c < b < a$

(2)[2023·沈阳二中月考] 已知正实数 x, y 满足 $x < y$, 设 $a = xe^x + y$, $b = ye^y + x$, $c = ye^x + x$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $a < c < b$ B. $c < a < b$
 C. $c < b < a$ D. $b < c < a$

◆◆ 总结反思

(1)处理底数不一样的对数大小比较问题一般用作差或作商法,也可以通过换底公式直接利用估算法解决,需要记住常用以10为底的对数估算值如下:

$\lg 2 \approx 0.301 \approx 0.3$, $\lg 3 \approx 0.477 \approx 0.48$, $\lg 5 \approx 0.699 \approx 0.7$, $\lg 7 \approx 0.845 \approx 0.85$, $\lg 11 \approx 1.041 \approx 1.04$.

(2)作差或者作商的难点在于后续变形处理,注意此处的常见技巧和方法.

类型四 利用函数图象

例4 (1)若 $\log_3 x = \log_4 y = \log_5 z < -1$, 则 ()

- A. $3x < 4y < 5z$ B. $4y < 3x < 5z$
 C. $4y < 5z < 3x$ D. $5z < 4y < 3x$

(2)已知 a, b, c 均大于1, 满足 $\frac{2a-1}{a-1} = 2 + \log_2 a$,

$\frac{3b-2}{b-1} = 3 + \log_3 b$, $\frac{4c-3}{c-1} = 4 + \log_4 c$, 则下列不等式成立的是 ()

- A. $c < b < a$ B. $a < b < c$
 C. $a < c < b$ D. $c < a < b$

◆◆ 总结反思

涉及某些由指数式、对数式给出的几个数的大小比较问题,可以把这几个数视为对应的指数函数、对数函数与另外某个函数图象交点的横坐标,利用图象的直观性解决.

类型五 构造函数

例5 (1)已知 $e^x - 2y > \ln y - x + \ln 2$, 则 ()

- A. $x > 2y$ B. $x < 2y$
 C. $x > \ln(2y)$ D. $x < \ln(2y)$

(2)已知实数 a, b, c 满足 $a^2 + \log_2 a = 0$, $2025^{-b} =$

$\log_{2025} b$, $c = \log_7 \sqrt{6}$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $c < a < b$
 C. $b < c < a$ D. $c < b < a$

◆◆ 总结反思

- (1)从题目条件出发,探求比较对象的关系.
 (2)根据条件等式的结构特征,发现同构特点,构造函数.

第12讲 函数的图象

课标要求

1. 掌握基本初等函数的图象特征,能熟练运用基本初等函数的图象解决问题.
2. 掌握图象的作法:描点法和图象变换.
3. 会运用函数的图象理解和研究函数性质.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 描点法作图

基本步骤是列表、描点、连线,具体为:

首先:①确定函数的定义域;②化简函数解析式;③讨论函数的性质(奇偶性、单调性、周期性).

其次:列表(尤其注意特殊点、零点、最大值点、最小值点、与坐标轴的交点).

最后:描点、连线.

2. 图象变换

(1) 平移变换

